EJERCICIO ESPACIOS VECTORIALES

Determine si el conjunto dado V es cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\odot$.

V es el conjunto de todos los polinomios de la forma $a t^2 + b t + c$ donde a, b y c son números reales, y $b = a + 1$;

$$(a_1 t^2 + b_1 t + c_1) \oplus (a_2 t^2 + b_2 t + c_2) = (a_1 + a_2) t^2 + (b_1 + b_2) t + (c_1 + c_2)$$

y

$$r \odot (a t^2 + b t + c) = (r a) t^2 + (r b) t + r c.$$

Solución.

Demostración. El problema nos dice $a t^2 + b t + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; y $b = a + 1$

entonces si

$\vec{u} = a_1 t^2 + b_1 t + c_1$

$\vec{v} = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$

tendremos

$\vec{u} \oplus \vec{v} = (a_1 + a_2) t^2 + (b_1 + b_2) t + (c_1 + c_2)$

cambiando b por $a + 1$,

$\vec{u} \oplus \vec{v} = (a_1 + a_2) t^2 + (a_1 + 1 + a_2 + 1) t + (c_1 + c_2)$

reduciendo la expresión $(a_1 + 1 + a_2 + 1)$,

$\vec{u} \oplus \vec{v} = (a_1 + a_2) t^2 + (a_1 + a_2 + 2) t + (c_1 + c_2)$

tomando $a_1 + a_2$ como a,

$\vec{u} \oplus \vec{v} = (a_1 + a_2) t^2 + (a + 2) t + (c_1 + c_2)$

y por tanto $b \neq a + 2$, con lo cual concluimos que V no esta cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\odot$. $\square$